4) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

on pose h(x)=f(x)-x $\Rightarrow h'(x)=f'(x)-1=\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}-1\leq 0$ car $1+x^2\geq 1$

h est continue et strictement décroissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur $h(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{+\infty}h,\lim\limits_{-\infty}h\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

comme $0\in h(\mathbb{R})$, alors il existe un unique réel α tel que $h(\alpha)=0$

$$h(\sqrt{3})\times h(2)<0 \quad \Rightarrow \alpha\in\left[\sqrt{3},2\right]$$

par suite α est l'unique solution de l'équation f(x)=x dans IR

5) $\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) (récurrence)

- $U_0=2$, $U_1=f(U_0)=1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad U_0\geq U_1$ (vrai)
- supposons que : $U_n\geq U_{n+1}$ et montrons que : $U_{n+1}\geq U_{n+2}$

$U_n\geq U_{n+1}\Rightarrow f(U_n)\geq f(U_{n+1})$ car f est croissante sur IR d'où $U_{n+1}\geq U_{n+2}$

conclusion : $U_n\geq U_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

par suite (U_n) est décroissante

b) (récurrence)

- $\sqrt{3}\leq U_0\leq 2$ (vrai)
- supposons que : $\sqrt{3}\leq U_n\leq 2$ et montrons que : $\sqrt{3}\leq U_{n+1}\leq 2$

$$\sqrt{3}\leq U_n\leq 2\Rightarrow f(\sqrt{3})\leq f(U_n)\leq f(2)\Rightarrow 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\leq U_{n+1}\leq 1+\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{2}\leq U_{n+1}\leq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\leq U_{n+1}\leq 2$$

conclusion : $\sqrt{3}\leq U_n\leq 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn